Arrlo

1	2	3	4
R	B	M	B

CALIFICACIÓN
6

seis

APELLIDO Y NOMBRE: LIBRETA/DNI:

Álgebra I - Curso de verano 2025

Primer parcial - 21/02/2025

1. Sea $X = \{f : \{n \in \mathbb{N} : n \leq 5\} \to \{n \in \mathbb{Z} : 0 \leq n \leq 100\}\}$, es decir, X es el conjunto de todas las funciones del conjunto $\{1, \ldots, 5\}$ en el conjunto $\{0, \ldots, 100\}$. Se define en X la relación $\mathcal{R}$ dada por

$$f \mathcal{R} g \iff f(4) \equiv g(4) \pmod{3}$$

   a) Decida si la relación es reflexiva, simétrica, transitiva y/o antisimétrica.

   b) Sea $g \in X$ la función definida por $g(n) = 5$ para todo $n \in \{1, \ldots, 5\}$. Calcule la cantidad de funciones inyectivas f tales que $f \mathcal{R} g$ y $f(5) = 14$.

2. Pruebe que la siguiente igualdad es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{9} \sum_{k=1}^{n} k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \left(-\frac{n}{3} - 1\right) \left(\frac{2}{3}\right)^{n} + 1.$$

3. Determine cuántas funciones sobreyectivas $f : \{n \in \mathbb{N} : n \leq 8\} \to \{n \in \mathbb{N} : n \leq 8\}$ cumplen simultáneamente las siguientes condiciones:

   - $f(3) \leq f(4) \leq f(5)$,
   - $f(1) + f(2)$ es impar.

4. Sea $a \in \mathbb{Z}$. Calcule todos los posibles valores de $d = (a^2 + a : a^3 + 3a^2 + 2a + 14)$. Para cada posibilidad de d hallada, caracterice todos los $a \in \mathbb{Z}$ para los cuales se obtiene dicho valor de d.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.

Justifique todas sus respuestas y escriba con claridad.

1 - $\{ fRp \Leftrightarrow f(4) \equiv p(4)\ (3)$, o sea, $f(4) - p(4) \equiv 0(3). \}$

a -

HOJA 1

Reflexividad:

- $fRf \Leftrightarrow f(4) \equiv f(4)\ (3) \longrightarrow$ esto es trivial ya que la función siempre será igual a sí misma para cualquier mod. $\boxed{\therefore \text{ es R}}$ ✓

Simetría:

$\cdot\ fRp \Leftrightarrow f(4) \equiv p(4)\ (3)$

$? \Rightarrow pRf \Leftrightarrow p(4) \equiv f(4)\ (3)$

$\longrightarrow$ estas expresiones son equivalentes, por lo que si ya sé que fRp se cumple, pRf se va a cumplir. ✓

- si sumo ambas puedo hacerlo aún más explícito:

$\cdot\ fRp \Leftrightarrow f(4) - p(4) \equiv 0(3)$

$? \Rightarrow pRf \Leftrightarrow p(4) - f(4) \equiv 0(3)$

$\longrightarrow \cancel{f(4)} - \cancel{p(4)} + \cancel{p(4)} - \cancel{f(4)} \equiv 0(3)$

$\Leftrightarrow 0 \equiv 0(3)$ ✓.

estás usando lo que querés demostrar

$\boxed{\therefore \text{ es S.}}$

Antisimetría:

$\cdot\ fRp \Leftrightarrow f(4) \equiv p(4)\ (3)$

$\cdot\ pRf \Leftrightarrow p(4) \equiv f(4)\ (3) \Leftrightarrow f = p\ ?$

- Como $f, p : \{1, \dots, 5\} \to \{0, \dots, 100\}$, puedo definir:

$$\begin{cases} f(4) = 1 \\ p(4) = 4 \longrightarrow p(4) \equiv 1(3) \end{cases}$$

se van a cumplir ambas relaciones:

$$\begin{cases} fRp \Leftrightarrow 1 \equiv 1(3) \\ pRf \Leftrightarrow 1 \equiv 1(3) \end{cases}$$

pero $f \neq p$, aunque sean igual en congruencia.

Hay q' definir los contraejemplos en todo el dominio

$\therefore$ $\boxed{\text{NO es AS}}$

Transitividad:

$\cdot\ fRp \Leftrightarrow f(4) \equiv p(4)\ (3)$

$\cdot\ pRh \Leftrightarrow p(4) \equiv h(4)\ (3)$

$? \Rightarrow fRh \Leftrightarrow f(4) \equiv h(4)\ (3)$

$\longrightarrow$ por cadena de congruencias, como las primeras dos se cumplen, sé que fRh también lo hará. ✓

- sumo las expresiones:

$fRp \Leftrightarrow f(4) - p(4) \equiv 0(3)$

$pRh \Leftrightarrow p(4) - h(4) \equiv 0(3)$

$\longrightarrow f(4) - \cancel{p(4)} + \cancel{p(4)} - h(4) \equiv 0(3)$

$\Leftrightarrow f(4) - h(4) \equiv 0(3)$

lo cual es exactamente fRh. ✓

$\boxed{\therefore \text{ es T}}$

$F(1) = ¿?$ $\quad g(1) = ?$

$F(2) = ¿?$ $\quad g(2) = ¿?$

$F(3) = ¿?$ $\quad g(3) = ¿?$

$F(4) = 1$ $\quad g(4) = 4$

$F(5) = ¿?$ $\quad g(5) = ¿?$

b. $\cdot\ p(n) = 5\ \forall n \in \{1, \dots, 5\}$. $5 \equiv 2 (3) \longrightarrow \{\underline{3k+2}\}$ ✓

$\cdot\ f\,R_p\, \Leftrightarrow f(n) \equiv p(n) (3)$ ó $f(n) - p(n) \equiv 0 (3)$ ✓

$\cdot\ f(5) = 14 \equiv 2 (3)$ ✓

· Como $p(n) = 5 \equiv 2 (3)$ sé que mis funciones deberán ser congruentes a ese valor. $p / F(4)$

¿Cuántos elem son $\equiv 2 (3) \in \{0, \dots 100\}$? ∴ $0 \leq 3k+2 \leq 100$

$-2 \leq 3k \leq 98$

$-\frac{2}{3} \leq k \leq \frac{98}{3} \Rightarrow \{ -0{,}66 \leq k \leq 32{,}6. \}$ ✓

Hay 33 elem $\in \{0, \dots, 100\}$ que lo cumplen. 2 *

$$\frac{\cancel{32}\ 99}{f(1)}\ \frac{\cancel{31}\ 98}{f(2)}\ \frac{30\ \ 97}{f(3)}\ \frac{\cancel{29}\ 32}{f(4)}\ \left[\frac{1}{f(5)}\right] = \frac{32!}{28!}$$ posibilidades.

↳ tiene 1 sola posibilidad porque ya me lo dieron definido como $f(5) = 14$. ✓

* Debo restar una posibilidad ya que $f(5) = 14$ y cubre una de ellas! como estoy calculando las iny. no deben repetirse valores. 2

∴ $\boxed{\text{Hay } \underbrace{\left(\frac{32!}{28!}\right)}_{\text{lo que calculé anteriormente}} \underbrace{4!}_{\text{permutaciones de } f(1), f(2), f(3), f(4)} f \text{ inyectivas que cumplen la consigna.}}$ Mal

RTa. 99.98.97...32

2 - $p(n) = \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \left(-\frac{n}{3}-1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n} + 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$. ✓

CB: $p(1)$ v?

$$\frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{0} = \left(-\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{1} + 1 \iff \frac{1}{9} = -\frac{8}{9} + 1 \iff \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \ \checkmark.$$ ✓

PI

HI: $\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{h} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \left(-\frac{h}{3}-1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{h} + 1$. p/ algún $h \in \mathbb{N}$

Qpq: $\underbrace{\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{h+1} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}} = \underbrace{\left(-\left(\frac{h+1}{3}\right)-1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{h+1} + 1}_{\star}$. ✓

$$\frac{1}{9}\left[\sum_{k=1}^{h} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} + (h+1)\left(\frac{2}{3}\right)^{h}\right] \overset{HI}{=} \left(-\frac{h}{3}-1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{h} + 1 + \frac{1}{9}\left[(h+1)\left(\frac{2}{3}\right)^{h}\right]$$ ✓

$\Rightarrow$ Emprolijo un poco la expresión: ✓

$$\left(\frac{-h-3}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{h} + 1 + \frac{1}{9}\left[(h+1)\left(\frac{2}{3}\right)^{h}\right] = \left(\frac{2}{3}\right)^{h}\left[\frac{-h-3}{3} + \frac{h+1}{9}\right] + 1$$ ✓

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{h}\left[\frac{-2h-8}{9}\right] + 1$$ ✓

Quiero ver si esto es igual a $\star$:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{h}\left[\frac{-2h-8}{9}\right] \cancel{+1} = \left[\frac{-h-4}{3}\right]\left(\frac{2}{3}\right)^{h+1} \cancel{+1}$$ ✓

$$\underset{\left(\frac{2}{3}\right)^{h} \neq 0}{\iff} \frac{-2h-8}{9} = \frac{-h-4}{3}\left(\frac{2}{3}\right) \iff \boxed{\frac{-2h-8}{9} = \frac{-2h-8}{9}}$$ ✓

es exactamente lo mismo!

$\therefore$ puedo asegurar que $p(n)$ v $\forall n \in \mathbb{N}$. ✓

4-

(I) $d \mid a^2+a$

(II) $d \mid a^3+3a^2+2a+14$

$\xrightarrow{-aI+II}$ (III) $d \mid 2a^2+2a+14 \xrightarrow{III-2I} \boxed{d \mid 14.}$

$\hookrightarrow d \in \{1,2,7,14\}.$

→ pruebo qué pasa con los valores hallados.

CASO 2

- $a^2+a \equiv 0\ (2)$
- $a^3+3a^2+\cancel{2a}+\cancel{14} \equiv 0\ (2) \iff a^3+a^2 \equiv 0\ (2)$

$\mathbb{Z}_2$

a	0	1
a^2+a	0	0
a^3+a^2	0	0

∴ 2 divide para todo $a \in \mathbb{Z}$.

CASO 7

- $a^2+a \equiv 0\ (7)$
- $a^3+3a^2+2a+\cancel{14} \equiv 0\ (7) \iff a^3+3a^2+2a \equiv 0\ (7)$

a	0	1	2	3	4	5	6
a^2+a	0	2	6	5	6	2	0
a^3+3a^2+2a	0	6	3	4	1	0	0

→ deduzco que 7 divide $\iff a \equiv 0\ (7)$ ó $a \equiv 6\ (7)$.

para los casos donde $a \equiv 0\ (7) \wedge a \equiv 6\ (7)$, como tanto 2 como 7 dividen, puedo firmar que 14 también lo hará, ya que $14 = 7.2$ y $7 \perp 2$

∴ $d = 2\ \forall a$ (o si $a \not\equiv 0\ (7)$ y $a \not\equiv 6\ (7)$)

$d = 14 \iff a \equiv 0\ (7)$ ó $a \equiv 6\ (7)$